

Introducción a la Física Experimental

Guía de la experiencia.

Determinación de la constante elástica de un muelle grande (*slinky*).

Departamento de Física Aplicada.
Universidad de Cantabria.

Febrero 17, 2006

Tenga en cuenta que la lectura previa de esta guía y la comprobación de las ecuaciones le llevará del orden de una hora, incluyendo la consulta de las palabras clave, y que la lectura de la bibliografía específica en inglés le llevará entre una y dos horas.

Resumen

Se proponen dos métodos alternativos para obtener experimentalmente la constante elástica recuperadora de un muelle grande (*slinky* en inglés). El primero está basado en la aplicación de la ley de Hooke (procedimiento estático) y el segundo en las propiedades que caracterizan el movimiento de un cuerpo cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio (procedimiento dinámico). Se introduce el concepto de masa equivalente del muelle.

Introducción

Muchos modelos físicos se modelizan como masas unidas por muelles o resortes ¹ La constante elástica de un muelle, k , juega un papel muy importante en todos los fenómenos físicos en los que interviene el muelle, por lo que su determinación experimental es importante. Se describen a continuación dos métodos diferentes para determinar la constante elástica de un muelle.

Primer método (estático)

Si un objeto sólido (piénsese en un muelle metálico) se encuentra sometido a fuerzas que tienden a alargarlo o comprimirlo (*fuerzas de tracción*) la forma del objeto varía. Si el objeto recupera su forma original después de suprimir las fuerzas aplicadas, se dice que el objeto está en su *zona elástica*. La mayoría de

¹Ponga algún ejemplo de sistemas físicos que se modelicen como masas unidas por muelles.

los cuerpos tienen un comportamiento elástico cuando son sometidos a fuerzas de tracción, siempre que estas fuerzas no superen el *límite de elasticidad* del material del que están hechos. Cuando las fuerzas aplicadas superan este límite, el cuerpo ya no recupera su forma original, queda con una deformación permanente y se dice que el objeto está en su *zona plástica*. Si todavía se aumenta la fuerza de tracción alcanza el *punto de rotura* y el cuerpo termina rompiéndose. Por debajo del límite elástico, hay todavía una región en la que el comportamiento del cuerpo es lineal, es decir, las variaciones producidas en su longitud son proporcionales a las fuerzas de tracción que se aplican (*ley de Hooke*).

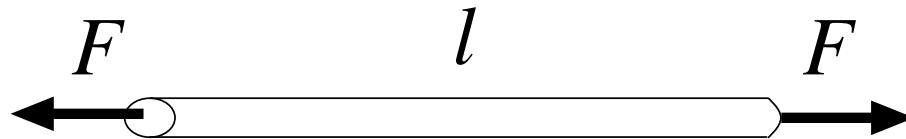


Figura 1: Barra sometida a fuerzas iguales y de sentido contrario en sus extremos.

La Fig. 1 muestra una barra sólida de longitud l sometida a una tracción F en ambos extremos. La barra se encuentra en equilibrio, pero las fuerzas aplicadas tienden a alargar la barra. El incremento relativo de longitud $\Delta l/l$ se denomina *deformación*. El cociente entre la fuerza y el área A de la sección recta de la barra se denomina *tensión*. En la región lineal, se verifica que la tensión es proporcional a la deformación y la constante de proporcionalidad se denomina *módulo de Young* (Y): $Y = (F/A)/(\Delta l/l)$.

Esta relación también puede escribirse bajo otro aspecto más utilizado cuando el objeto del que se trata es un muelle: la fuerza de tracción es proporcional al incremento de longitud que se produce y la constante de proporcionalidad se denomina *constante recuperadora* (k) o elástica: $F = -k\Delta l$. Ésta se conoce como *ley de Hooke* y es una de las primeras leyes cuantitativas en Física ².

Segundo método (dinámico)

Cuando un objeto colocado al extremo de un muelle se separa ligeramente de su posición de equilibrio estable y luego se deja libre, comienza a describir un movimiento armónico simple (m.a.s.) (ver Fig. 3) Si, a partir de su posición de equilibrio, se aplica al cuerpo de masa m una pequeña fuerza instantánea en la dirección longitudinal del muelle, el conjunto muelle-objeto comienza a oscilar. A partir de la segunda ley de Newton, se puede escribir la ecuación de movimiento de la masa m como

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = -k(l - l_0) . \quad (1)$$

²Indique el significado del signo menos en la ecuación anterior.

Cuando el cuerpo cuelga de un muelle vertical, entonces

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} = -k (l - l_E) , \quad (2)$$

con $k(l_E - l_0) = mg$ [9]. Despreciando la masa del muelle frente a la del objeto, este último describe un m.a.s. de período T dado por la expresión,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} , \quad (3)$$

en donde m es la masa del objeto y k la constante recuperadora del muelle (consulte la Ref. [1] en la p. 413) [10]. En este caso, el movimiento de oscilación tiene lugar alrededor de la longitud de equilibrio l_E .

En una segunda aproximación a la descripción de la oscilación del cuerpo, hay que tener en cuenta la masa del muelle. Es decir, si el muelle es suficientemente pesado, su extremo puede oscilar sin necesidad de que haya ninguna masa colgada de él.

Para ver la influencia de la masa del muelle, se observa en primer lugar que no todas las partes del muelle oscilan con la misma amplitud. Mientras que el punto del muelle unido a la masa colocada en su extremo oscila como él, el punto del muelle unido al soporte superior no se mueve. Es decir, las diferentes partes del muelle oscilan con amplitudes diferentes. Por esta razón, admitiendo que el muelle es real (no ideal) y que, por tanto, posee una masa distinta de cero, no se puede, sencillamente, sustituir en (3) la masa m del objeto por la del conjunto muelle-objeto, sino que se asocia al muelle una ‘masa efectiva’, o masa equivalente, (m_e) de manera que el período de oscilación del conjunto muelle-objeto será,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_e}{k}} , \quad (4)$$

Para estimar la masa equivalente de un muelle de masa m_0 se puede determinar la variación de energía cinética ΔT que experimenta el muelle de longitud L cuando es estirado de tal manera que su extremo libre se mueve con velocidad V . El extremo fijo permanece con velocidad 0. Como a lo largo del muelle diferentes partes se van a mover con velocidades diferentes, se debe empezar por poner que

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm , \quad (5)$$

siendo v la velocidad con que se mueve la porción de masa dm correspondiente. Si el muelle es homogéneo, con densidad $\rho = m_0/L$, entonces $dm = m_0 dl/L$, siendo dy un elemento diferencial de longitud. Si la velocidad de cada elemento dl es proporcional a su distancia al extremo fijo entonces $v(l) = Vl/L$, y

$$dT = \frac{1}{2} \left(\frac{lV}{L} \right)^2 \frac{m_0}{L} dl . \quad (6)$$

Integrando para dl entre 0 y L , se tiene que

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_0}{3} V^2. \quad (7)$$

Este resultado sugiere que si para un objeto de masa m_0 que se mueve todo él con velocidad V su energía cinética es $m_0 V^2/2$, en los intercambios de energía un muelle que se mantiene fijo por un extremo y que se estira siguiendo la ley de Hooke se comporta como si fuera un cuerpo de masa –efectiva– $m_0/3$ [11].

Reflexiones previas a la realización del experimento

Antes de llevar a cabo las experiencias, considere las siguientes cuestiones:

- 1.- Después de consultar algún texto de Física (por ejemplo, la Ref. [1], pg. 359 y ss. ó la Ref. [2], pg. 110 y ss.), represente una curva típica de la tensión aplicada en función de la deformación producida para una barra metálica, señalando los puntos y regiones significativos de los que se ha hablado en la Introducción.
- 2.- Consulte una tabla de valores del módulo de Young para algunos metales y otros materiales. Escríbalos e indique las unidades en las que se expresan.
- 3.- Diseñe un procedimiento experimental para determinar la constante elástica k de un muelle utilizando directamente la ley de Hooke. ¿Puede calcular, a partir de esa constante k , el módulo de Young? Explique cómo.
- 4.- Diseñe un procedimiento experimental para determinar la constante elástica k de un muelle utilizando la Eq. (4).
- 5.- Demuestre que al ser

$$T^2 = (2\pi k)^{-1} m + (2\pi k)^{-1} m_e, \quad (8)$$

la representación gráfica de los cuadrados de los períodos T^2 del muelle frente a las masas colgadas del mismo, m , le permite obtener la constante elástica y la masa efectiva del muelle.

Descripción del material

Para llevar a cabo este tipo de experiencias se utiliza el siguiente material (ver Fig. 2):

1. Plataforma soporte [(1) en Fig. 2].
2. Dos muelles grandes (*slinky*) [(2) en Fig. 2]

3. Regla de 1 m de longitud [(4) en Fig. 2]
4. Juego de pesas.
5. Cronómetro digital.
6. Balanza electrónica.

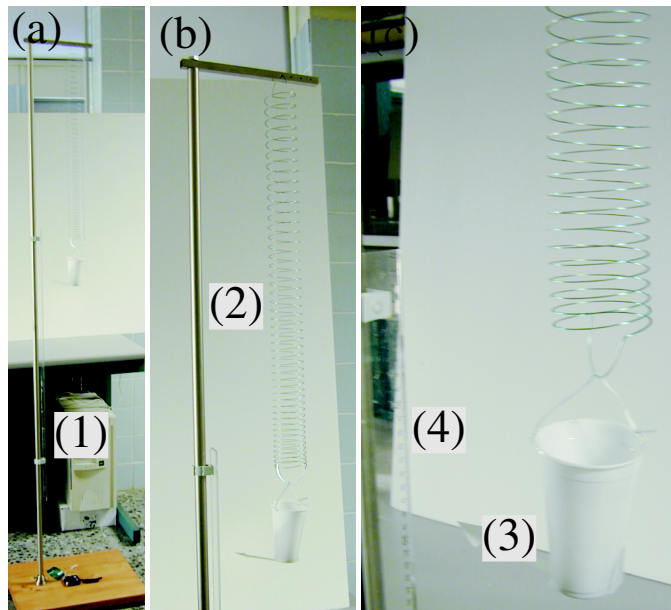


Figura 2: Dispositivo experimental para medir la constante elástica de un *slinky*. (a) (1) Plataforma de soporte del muelle, (b) el muelle estirado bajo su propio peso (2) y el de un vasito (3), (c) detalle del extremo del muelle y del vasito en el que se colocan los pesos. (4) Regla vertical.

Modo operativo

Primer método (estático)

Tome nota del diámetro de la sección recta del muelle (recuerde las normas para determinar una medida directa) y de su masa.

Cuelgue verticalmente, del vástago que hay en la parte superior del soporte, un extremo del muelle. Tome nota de la cota que señala el borde del muelle sobre la escala y utilícela como referencia (cero) de las medidas posteriores.

Cuelgue el vasito de plástico –previamente pesado– en el extremo inferior del muelle.

Tome siempre como índice de lectura, de las sucesivas medidas sobre la escala, el borde del extremo del muelle. Asegúrese de no cometer error de paralaje (Ref. [3]).

Coloque, cuidadosamente, una masa de plomo, previamente pesada, para producir un pequeño alargamiento del muelle. Tome nota de la fuerza aplicada y del correspondiente alargamiento producido. Repita el proceso con ocho o nueve fuerzas distintas.

Segundo método (dinámico)

Cuelgue verticalmente, del vástago que hay en la parte superior del soporte, un extremo del muelle. Cuelgue el vasito en el extremo inferior del muelle. Recuerde que el vasito *no es parte del muelle* sino una masa m_p adicional.

Coloque, cuidadosamente, una masa m_j conocida (una masa de plomo o una pesa) sobre el platillo, elíjala adecuadamente para producir un pequeño alargamiento del muelle. Estire ligeramente el muelle tirando levemente del platillo hacia abajo durante un instante y libere el sistema. Determine el período de oscilación ³ T_i de la masa y anote el correspondiente valor de $m_i = m_j + m_p$. Repita el proceso con cinco masas distintas.

Tabule los resultados y represente gráficamente los puntos experimentales (m_i, T_i^2) . Ajústelos a una recta (recuerde la ecuación (4)). A partir de la pendiente de esta recta (caso de que lo sea) y de su ordenada en el origen, obtenga los valores experimentales de m_e y k . Contraste y discuta posteriormente los resultados experimentales obtenidos mediante este procedimiento con el valor de k obtenido mediante el método estático y el valor de m_e estimado teóricamente [12].

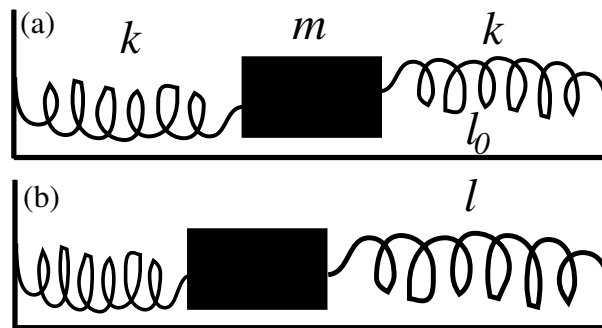


Figura 3: (a) Cuerpo de masa m entre dos muelles de constante elástica k y longitud en reposo l_0 . (b) Cuando se desplaza de su posición de equilibrio, con los muelles de longitud $l_0 + \Delta l$ y $l_0 - \Delta l$ respectivamente, al dejarlo libre, el cuerpo oscilará.

Preguntas adicionales relacionadas con la experiencia

1. ¿Cuál de los dos métodos, el estático o el dinámico, es más preciso? Justifique la respuesta.

³Describa el procedimiento que sigue para determinar el período.

2. ¿Cuál es la mejor estimación del valor de la constante elástica del muelle, considerando conjuntamente los dos experimentos (mejor experimento combinado)? Consulte las Refs. [4] ó [5].

3. Dado el sistema de la Fig. 3, demuestre que el período de oscilación para ese sistema es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (9)$$

4. Un muelle de constante elástica k se encuentra atado a dos bloques de masa m cada uno. Demuestre que el período de oscilación de ese sistema es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (10)$$

Referencias

- [1] Tipler P. A., *Física*, Ed. Reverté S.A., Barcelona (1999), 4ª edición, tomo I.
- [2] Gómez del Campo, J.C., *Mecánica*, Ed. Paraninfo, S. A., Madrid (1995).
- [3] Meiners H. F., Eppenstein W. y Moore K. H., *Experimentos de Física*, Ed. Limusa S. A., México (1980), pg. 23.
- [4] Lyons L., *Data analysis for Physical Science students*, Cambridge University Press, (1996), pg. 31 y ss..
- [5] Barford N. C., *Experimental measurements: precision, error and truth*, John Wiley and Sons Ltd., 2ª edición, (1987), pg. 74 y ss..
- [6] M Sawicki, *Static elongation of a suspended Slinky*, Physics Teacher **40**, 276-278 (2002)
- [7] T C Heard, N D Newby, *Behavior of a soft spring*, American Journal of Physics **45**, 1102-1106 (1977)
- [8] J G Fox, J Mahanty, *The effective mass of an oscillating spring*, American Journal of Physics **38**, 98-100 (1970)
- [9] H Erlichson, *The vertical spring-mass system and its equivalent*, Physics Teacher **14**, 573-573 (1976); A Scott, *Transfer of energy in a spring-mass pendulum*, The Physics Teacher **23**, 356 (1985)
- [10] J. W. Dewdney, *Simple pendulum equivalent to spring mass system*, Am. J. Phys. **26**, 340 (1958).
- [11] L Ruby, *Equivalent mass of a coil spring*, The Physics Teacher **38**, 140-141 (2000)
- [12] D S Mills, *The spring and mass pendulum. An exercise in mathematical modeling*, The Physics Teacher **19**, 404 (1981).

- [13] A Scott, *Transfer of energy in a spring-mass pendulum*, The Physics Teacher **23**, 356 (1985)

El péndulo de Wilberforce consta de un muelle elástico del que se cuelga un cuerpo que puede también girar, una mezcla de péndulo de torsión y muelle elástico. De esta forma, además de los modos de oscilación del muelle se presentan modos de oscilación de torsión.

- [14] J Williams, R Keil, *Doing physics: A Wilberforce pendulum, A spring winder*, The Physics Teacher **21**, 257-258 (1983)

- [15] R E Berg and T S Marshall, *Wilberforce pendulum oscillations and normal modes*, Am. J. Phys. **59**, 32-38 (1991)