	PROPAGACIÓN DE ERRORES	IES La Magdalena. Avilés. Asturias

Cuando obtenemos una magnitud de forma indirecta (a partir de cálculos en los que intervienen medidas directas), debemos de tener en cuenta la incertidumbre de las medidas directas y su propagación debido a las operaciones matemáticas a las que las sometamos.

Para una magnitud (U) que dependa de varias variables***: U = f(x,y,z),*** el error se calcula según (Gauss):

$$\boxed{\Delta U = \sqrt{\left(\left|\frac{\delta U}{\delta x}\right|\Delta x\right)^2 + \left(\left|\frac{\delta U}{\delta y}\right|\Delta y\right)^2 + \left(\left|\frac{\delta U}{\delta z}\right|\Delta z\right)^2}}$$

- **Una sola variable:** $\boxed{U = f(x)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta U = \frac{dU}{dx}\Delta x}$

Ejemplo. Cálculo del volumen de una esfera

$$\text{Datos}: r = 2{,}30 \pm 0{,}05\ \text{cm}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\, 2{,}30^3\,\text{cm}^3 = 51{,}0\ \text{cm}^3$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{3}\,\pi r^2 = 4\pi r^2$$

$$\Delta V = \frac{dU}{dr}\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r = 4\pi\ 2{,}30^2\,\text{cm}^2\ 0{,}05\ \text{cm} = 3{,}32\ \text{cm}^3 \approx 3\ \text{cm}^3$$

Una sola c.s

$\boxed{\text{Expresión}: V = 51 \pm 3\ \text{cm}^3}$ $\longrightarrow$ La cifra del error ha de coincidir, en orden de magnitud, con la última cifra significativa de la medida.

$$U = a\,x \qquad \Delta U = a\,\Delta x$$

$$U = \frac{x}{a} \qquad \Delta U = \frac{\Delta x}{a}$$

$$a = \text{constante}$$

Si para calcular el periodo de de un péndulo tomamos el tiempo que tarda en dar cinco oscilaciones, cometiendo un error de 0,001 s (incertidumbre del cronómetro), para obtener el periodo hay que dividir la medida entre cinco, y el error también quedará dividido entre cinco. (Hay que tener en cuenta que a la hora de expresar la medida si el error calculado es menor que la incertidumbre del aparato de medida se debe poner esta como error).

Ejemplo. Cálculo de la longitud de una circunferencia:

$$\text{Dato}: D = 20{,}5 \pm 0{,}1\,\text{cm} \quad (\text{Diámetro})$$

$$R = 10{,}3 \pm 0{,}1\,\text{cm}$$

$\longrightarrow$ El error sería 0,1 cm / 2= 0,05 cm, pero como es inferior a la precisión del aparato tomamos 0,1 cm

$$L = 2\,\pi\,R = 2\,\pi\,.\,10{,}3\ \text{cm} = 64{,}7\ \text{cm}$$

$$\Delta L = 2\,\pi\,\Delta R = 2\,\pi\,.\,0{,}1\,\text{cm} = 0{,}628\ \text{cm} \approx 0{,}6\ \text{cm}$$

$$\boxed{L = 64{,}7 \pm 0{,}6\ \text{cm}}$$

- **Dos variables (producto, cociente):**

$$\left.\begin{array}{ll}\boxed{U = a\,x^n y^m} & a = cte \\ \boxed{U = a\,\dfrac{x^n}{y^m}} & a = cte\end{array}\right\} \quad \boxed{\Delta U = U\sqrt{\left(n\,\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(m\,\frac{\Delta y}{y}\right)^2}}$$

Ejemplo. Determinación de "g" mediante un péndulo: $g = 4\pi^2\,\dfrac{L}{T^2}$

Para $T = 1,440 \pm 0,002\ s$

$L = 0,500 \pm 0,001\,m$

$$g = 4\pi^2\,\frac{L}{T^2} = 4\pi^2\,\frac{0,500\ m}{1,440^2\,s^2} = 9,52\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2} = 9,52\,\frac{m}{s^2}\sqrt{\left(\frac{0,001}{0,500}\right)^2 + \left(\frac{0,002}{1,440}\right)^2} = 0,023\,\frac{m}{s^2} = 0,02\,\frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\text{Expresión}: g = 9,52 \pm 0,02\,\frac{m}{s^2}}$$

Para:

$$\left.\begin{array}{ll}\boxed{U = a\,x\,y} & a = cte \\ \boxed{U = a\,\dfrac{x}{y}} & a = cte\end{array}\right\} \quad \boxed{\Delta U = U\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}}$$

- **Dos variables (suma, diferencia):**

$$\boxed{U = a\,x^n \pm b\,y^m} \qquad \boxed{\Delta U = \sqrt{T_1^2\left(n\,\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + T_2^2\left(m\,\frac{\Delta y}{y}\right)^2}}$$

$$\text{Donde}: T_1 = a\,x^n; T_2 = b\,y^m$$

$$\text{Para}: \boxed{U = x + y}$$

$$\boxed{\Delta U = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$