| | | |
|---|---|---|
| | **Movimiento ondulatorio**<br>**Ondas armónicas** | **IES La Magdalena.**<br>**Avilés. Asturias** |

**Una onda es una perturbación que se propaga.** Con la palabra “perturbación” se quiere indicar cualquier tipo de alteración del medio: una ondulación en una cuerda, una compresión en el aire (onda sonora), campos electromagnéticos oscilantes (onda electromagnética)… etc.

***Clasificación según el medio de propagación***

***La mayor parte de las ondas necesitan un medio elástico que haga posible la propagación de la perturbación de un punto a otro. Son las llamadas ondas materiales o mecánicas.*** Son ondas materiales: el sonido (que necesita el aire para su propagación), las ondas que se producen al agitar una cuerda (se propagan a través de la cuerda),... etc.

***Las ondas electromagnéticas, por el contrario, no necesitan ningún medio para propagarse. Pueden hacerlo en el vacío.*** Son ondas electromagnéticas: la luz, las ondas de radio y televisión...etc.

***Clasificación según dirección de perturbación/propagación***

En ***las ondas transversales*** la dirección en la que se produce la perturbación y la dirección en la que se propaga son perpendiculares. Son ejemplos de ondas transversales las ondas electromagnéticas, la onda que se transmite en una cuerda, las ondas en la superficie de un lago…etc

En las ***ondas longitudinales*** la dirección de perturbación y la de propagación es la misma.

***El sonido es una onda longitudinal.***

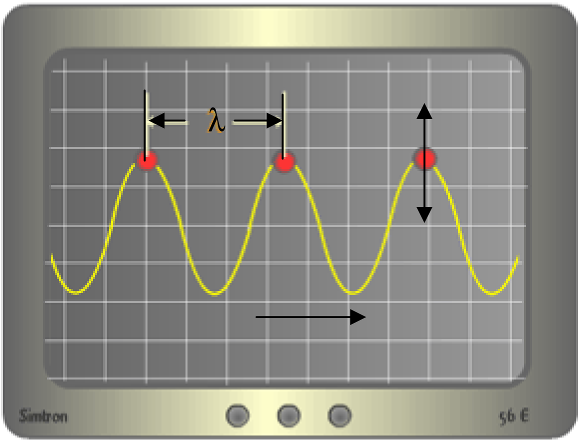
Es muy importante diferenciar entre el movimiento que tienen los puntos del medio cuando son alcanzados por la onda y el movimiento de la propia onda. Los puntos oscilan alrededor de su posición de equilibrio, mientras que la onda se traslada hacia la derecha, por ejemplo.

Dependiendo de la distancia a la que estén situados los puntos del medio pueden oscilar a la vez o no. Cuando oscilan a la vez se dice que **están en fase..** (ver fig.)

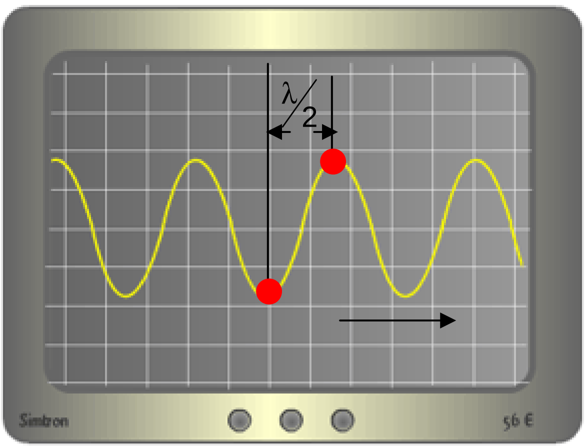
**Se denomina longitud de onda,** $\lambda$**, la distancia mínima existente entre dos puntos que oscilan en fase**.

**Dos puntos están en fase cuando están separados una distancia igual a un número entero de longitudes de onda:**

$$\Delta x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda\ldots = n\lambda$$




La onda se propaga de izda. a dcha. Los puntos del medio oscilan arriba y abajo al ser alcanzados por la onda y a la vez, ya que están separados por una distancia igual a la longitud de onda***. Están en fase***




Puntos que oscilan ***en oposición***

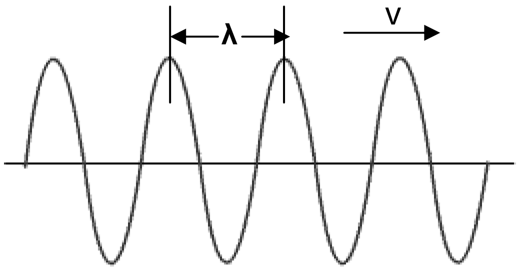
Si no oscilan a la vez se dice que **están desfasados.** Un desfase importante es el de dos puntos que oscilan de forma tal que cuando uno está situado en una cresta el otro lo está en un valle (ver figura). Se dice que **oscilan en oposición.**

En la figura adjunta los dos puntos que oscilan en oposición están separados por una distancia igual a media longitud de onda:

**Dos puntos oscilan en oposición cuando están separados una distancia igual a un número impar de semilongitudes de onda:**

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, 3\,\frac{\lambda}{2}, 5\,\frac{\lambda}{2} = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}$$

Cuando la onda se traslada una distancia igual a la longitud de onda los puntos del medio realizan una oscilación completa.




**Se denomina periodo (T) el tiempo que la onda tarda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.** Se mide en segundos. También se puede definir el periodo como el tiempo que tarda un punto en dar una oscilación completa.

Para medir el periodo de una onda se toma como referencia una de las crestas de la misma y se determina el tiempo que tarda en pasar la siguiente.

**Se define la frecuencia (f) como el inverso del periodo**. Se mide en $s^{-1}$ o Hz (herzios)

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

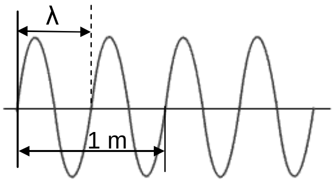
Físicamente la frecuencia se corresponde con el número de oscilaciones que un punto realiza en un segundo.

**Velocidad de propagación de una onda (v) es la rapidez con la que ésta se traslada en el medio en el que se propaga**:

$$\boxed{v = \frac{e}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\,\frac{1}{T} = \lambda\,f}$$

Se denomina ***número de onda*** $(\tilde{\nu})$ al número de oscilaciones que presenta la onda por unidad de distancia (metro) y es la inversa de la longitud de onda. Se mide en $m^{-1}$.

$$\boxed{\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}}$$




$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}5\,m} = 2\,m^{-1}$$

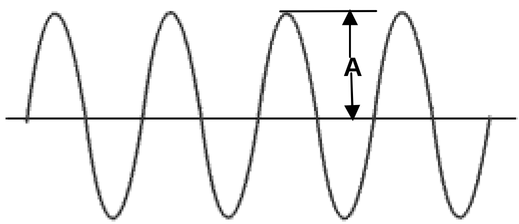
La velocidad de propagación para las ondas materiales depende de las propiedades del medio en el que se propagan. Por ejemplo, para una cuerda tensa depende de su tensión y de la densidad lineal de masa.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad T = \text{Tensión} \; ; \; \mu = \text{Densidad lineal de masa} : \frac{m}{L}$$

Las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío (y en el aire) con una velocidad de **300 000 km/s**. En los demás medios (agua, vidrio…) se propagan más lentamente.

**Amplitud (A) es el valor máximo que adquiere la perturbación**.

Para medirlo se determina el valor de la altura de una cresta desde la línea base (la que divide en dos a la onda).




Los colores que podemos percibir son ondas electromagnéticas de distintas frecuencias:

| Color | Frecuencia (valor x$10^{12}$Hz) |
|---|---|
| Rojo | 450 |
| Naranja | 475 |
| Amarillo | 515 |
| Verde | 600 |
| Azul | 650 |
| Violeta | 725 |

La intensidad de una luz está relacionada con la amplitud de la onda. Una luz más intensa se corresponde con una amplitud mayor.

En el sonido la frecuencia está relacionada con el tono (agudo a grave) y la amplitud con el volumen (débil o fuerte).

| Notas | Frecuencia (Hz) |
|---|---|
| Do | 264 |
| Re | 297 |
| Mi | 330 |
| Fa | 354 |
| Sol | 396 |
| La | 440 |
| Si | 495 |

## Ondas armónicas. Ecuación de una onda

De todos los movimientos ondulatorios el movimiento ondulatorio armónico, u ondas armónicas, es de especial importancia. Una onda es armónica cuando provoca en los puntos del medio un movimiento oscilatorio armónico simple (MAS).

La ecuación de una onda armónica es:

Número de onda ($m^{-1}$)

Pulsación ($s^{-1}$)

$$\boxed{y = A \text{ sen } (kx \pm \omega t + \varphi_0)}$$

Valor de la perturbación

Amplitud: valor máximo de la perturbación

Fase inicial (rad)

***Signo -*** para ondas que se propaguen ***hacia la derecha***.

***Signo +*** para ondas que se propaguen ***hacia la izquierda.***

Donde :

$$\boxed{\begin{gathered}\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ k = \frac{2\pi}{\lambda}\end{gathered}}$$

De una manera análoga a lo visto para el MAS la ***fase inicial está relacionada con las condiciones iniciales*** o instante en el que se comienza a contar el tiempo (t=0)

Haciendo uso de la definición de k y $\omega$ y teniendo en cuenta la relación entre velocidad de propagación de la onda, longitud de onda y periodo:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

se puede escribir la ecuación anterior en otras formas alternativas:

$$y = A \text{ sen } (kx \pm \omega t) = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{T} t\right) = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$$

$$\boxed{y = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)}$$

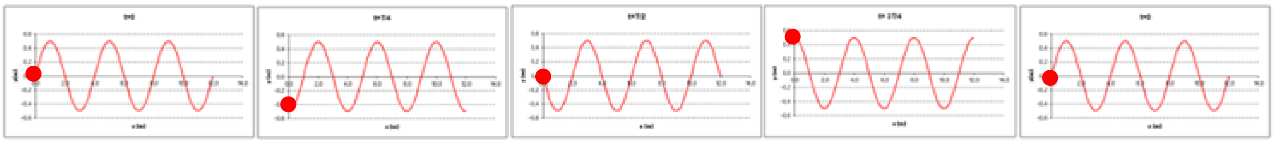
$$y = A \text{ sen } (kx \pm \omega t) = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{T} t\right) = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{x}{vT} \pm \frac{t}{T}\right) =$$

$$= A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{v} \pm t\right)$$

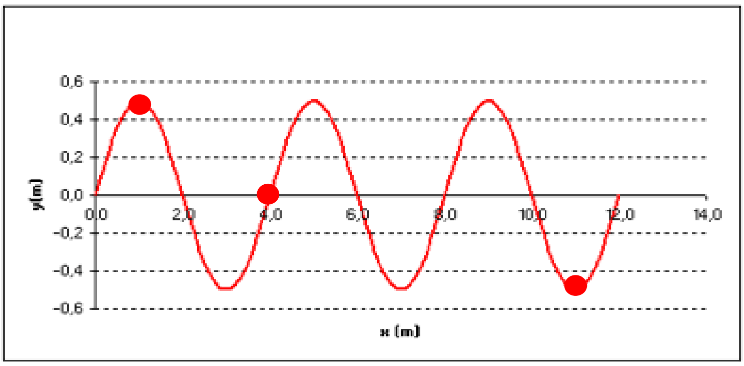
$$\boxed{y = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{v} \pm t\right) = A \text{ sen } \omega \left(\frac{x}{v} \pm t\right)}$$

***Como puede verse la ecuación de una onda armónica es doblemente periódica. Esto es, depende (senoidalmente) de dos variables: tiempo (t) y posición respecto del origen (x)***.

Para darnos cuenta de esta doble periodicidad tenemos que tener muy presente que una onda no es algo estático, sino que se mueve (hacia la derecha, por ejemplo). Por tanto, el valor de la elongación (y) en cualquier punto depende de no sólo del tiempo transcurrido (como ocurría en el MAS), sino de su distancia al origen. En la figura situada debajo se muestran unas instantáneas de una onda que se desplaza hacia la derecha tomadas a intervalos regulares de T/4 s. Si nos fijamos en uno de los puntos (el lleno, por ejemplo) su distancia al origen es contante (cero), pero su elongación (la y) varía con el tiempo. Oscila con MAS.



t = 0 t = T/4 t = T/2 t = 3/4 T t =T




Si fijamos ahora el tiempo (tomando una instantánea de la onda) vemos que la elongación (y) de un punto depende de su distancia al origen (de x). En resumidas cuentas, para saber cuál es la elongación de un punto deberemos conocer el tiempo y la distancia al origen.

***La ecuación de una onda tiene una doble dependencia: del tiempo y de la distancia al origen.***

## Ondas armónicas. Velocidad y aceleración

Para calcular la velocidad de un punto de una onda obtenemos la derivada respecto del tiempo de la ecuación de onda (hay que tener en cuenta que la derivada sería entonces parcial, ya que la elongación de un punto depende de t y de x). Para calcular la aceleración obtenemos la derivada (parcial) de la velocidad respecto del tiempo. Para una onda que se desplace hacia la derecha, se tiene:

$$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt}\right)_x &= \frac{\delta y}{\delta t} = v = -\,\omega A \cos\ (kx - \omega t + \varphi_0) \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_x &= \frac{\delta v}{\delta t} = a = -\,\omega^2 A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \varphi_0) \end{aligned}}$$

Podemos también realizar estos cálculos teniendo en cuenta que los puntos se mueven con MAS y que su velocidad y aceleración vienen dados por (recordar que el movimiento tiene lugar según el eje Y):

$$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$
$$a = -\,\omega^2 y$$

**Ejemplo 1 (Oviedo, 2006-2007)**

La ecuación de una onda, expresada en unidades S I, viene dada por $A(x,t) = A_0 \text{sen}(2,5x - 4t)$

Calcular su velocidad de propagación, longitud de onda, frecuencia y periodo.

**Solución:**

Comparando la ecuación dada con la general para una onda armónica:

$$A(x,t) = A_0 \text{sen}(2,5x - 4t)$$
$$y = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

Deducimos que :

$$\boxed{\begin{aligned} &A = A_0 (m) \\ &k = 2,5\ m^{-1} \\ &\omega = 4\ s^{-1} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2,5\ m^{-1}} = 0,8\pi\ (m) = 2,51\ m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\ s^{-1}} = \frac{\pi}{2}\ (s) = 1,57\ s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi/2\ (s)} = \frac{2}{\pi}\ s^{-1} = 0,64\ s^{-1}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8\pi\ m}{\frac{\pi}{2}\ s} = 1,60\ \frac{m}{s}$$

**Ejemplo 2 (Oviedo, 2002)**

Una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda viene dada (en unidades SI) por :

$$y(x,t) = 0,02\ \text{sen}(2,5x - 3,2t)$$

Calcular:

a) Su velocidad de propagación
b) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier partícula (o segmento infinitesimal) de la cuerda?

**Solución:**

a) Comparando la ecuación dada con la general para una onda armónica:

$$y(x,t) = 0,02\ \text{sen}(2,5x - 3,2t)$$
$$y = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

Deducimos que :

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 0,02\ m \\ k &= 2,5\ m^{-1} \\ \omega &= 3,2\ s^{-1} \end{aligned}} \Rightarrow$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2,5\ m^{-1}} = 0,8\pi\ (m) = 2,51\ m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3,2\ s^{-1}} = 0,0625\ \pi\ (s) = 1,96\ s$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8\pi\ m}{0,0625\ \pi\ (s)} = 1,28\ \frac{m}{s}$$

b) Todos los puntos de la cuerda vibran con MAS y adquirirán su máxima velocidad cuando pasen por el punto de equilibrio (y=0). La velocidad máxima para un punto que oscile con MAS (ver apuntes) viene dada por:

$$v = \pm\ \omega\ A \quad \text{Donde los signos indican el sentido}$$

$$v = 3,2\ s^{-1}.0,02\ m = 0,064\ \frac{m}{s} = 6,4\ \frac{cm}{s}$$

## La fase inicial

Para calcular la fase inicial haremos uso de las ecuaciones que nos dan la elongación y la velocidad. Suponemos que la onda viaja hacia la derecha:

$$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \varphi_0)$$
$$v = -\ \omega A\ \cos\ (kx - \omega t + \varphi_0)$$

En el instante t=0 y para x =0, tendremos:

$$\boxed{\begin{aligned} y(0,0) &= A\ \text{sen}\ (\varphi_0) \\ v(0,0) &= -\ \omega A\ \cos\ (\varphi_0) \end{aligned}}$$

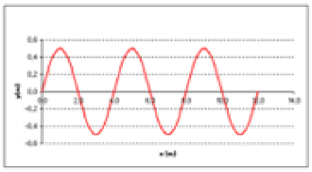
Dando valores a la fase inicial obtenemos los valores correspondientes para **y** (elongación) y **v** (velocidad):

| $\varphi_0$ | y | v |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $-\ \omega\ A$ |
| $\pi/2$ | A | 0 |
| $\pi$ | 0 | $\omega\ A$ |
| $3\pi/2$ | - A | 0 |

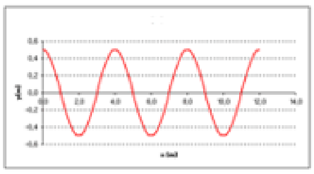
**NOTA**
Las ecuaciones anteriores pueden servirnos para calcular el desfase, ya que:

$$\boxed{\text{sen}\ (\varphi_0) = \frac{y_0}{A} \qquad \cos\ (\varphi_0) = -\frac{v_0}{\omega\ A}}$$

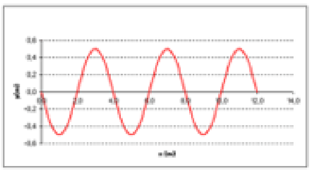
Se muestran a continuación el aspecto y la ecuación de varias ondas que se mueven hacia la derecha y tienen distinta fase inicial.



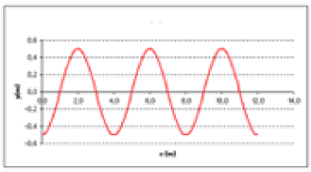
$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t)$



$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \frac{\pi}{2})$



$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \pi)$



$y = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \frac{3}{2}\pi)$

**NOTA**

Cuando la fase vale $\frac{\pi}{2}$, y teniendo en cuenta que $\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$, podemos escribir:

$$y = A \text{ sen } (kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cos (kx - \omega t)$$

Cuando la fase vale $\pi$, y teniendo en cuenta que $\text{sen}(\alpha + \pi) = \text{sen}(-\alpha)$, podemos escribir:

$$y = A \text{ sen } (kx - \omega t + \pi) = A \text{ sen} \left[-(kx - \omega t)\right] = A \text{ sen } (\omega t - kx)$$

## El problema del desfase

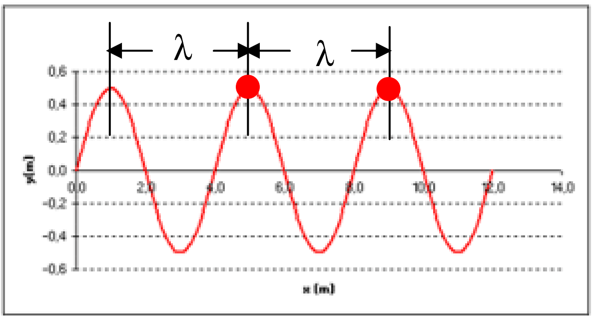
***Dos puntos de una onda oscilan en fase cuando están en idéntico estado de movimiento***. Por ejemplo si en un instante dado ambos están en una cresta de la onda.

Dos puntos oscilarán en fase (ver pag 1) cuando estén separados por una distancia igual a un número entero de longitudes de onda:

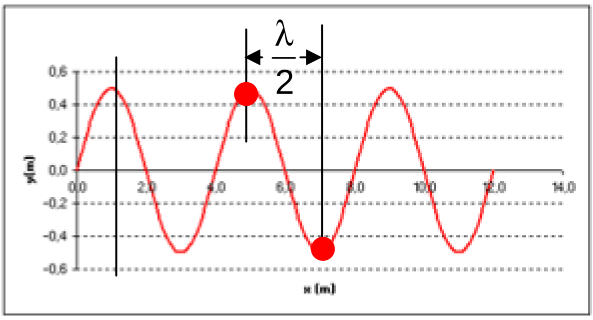
$$\Delta x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda ... = n\lambda$$

***Dos puntos se dice que están en oposición si su estado de movimiento es opuesto***, es decir sus velocidades tienen idéntico valor, pero se mueven en sentido contrario. Esto sucede, por ejemplo, cuando uno de los puntos está en una cresta y otro en un valle.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2} ... = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$




Puntos oscilando en fase




Puntos oscilando en oposición

El desfase entre dos puntos, en consecuencia, depende de la distancia entre ambos y podremos calcularlo restando las fases (ángulo) de la ecuación de onda correspondiente.

Si imaginamos dos puntos de una misma onda situados a una distancia $x_1$ y $x_2$ del origen, en un instante dado (t), tendrán una elongación (y) dada por:

$$y_1 = A \text{ sen } (kx_1 - \omega t + \varphi_0)$$
$$y_2 = A \text{ sen } (kx_2 - \omega t + \varphi_0)$$

La diferencia de las fases de ambos (desfase) valdrá:

$$\Delta\varphi = (kx_2 - \omega t + \varphi_0) - (kx_1 - \omega t + \varphi_0) = kx_2 - kx_1$$
$$\boxed{\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = k\Delta x}$$

Si los puntos considerados están separados por una distancia igual a un múltiplo entero de longitudes de onda estarán en fase, y si lo están por un número impar de semilongitudes de onda lo harán en oposición. Por tanto:

Para dos puntos en fase :

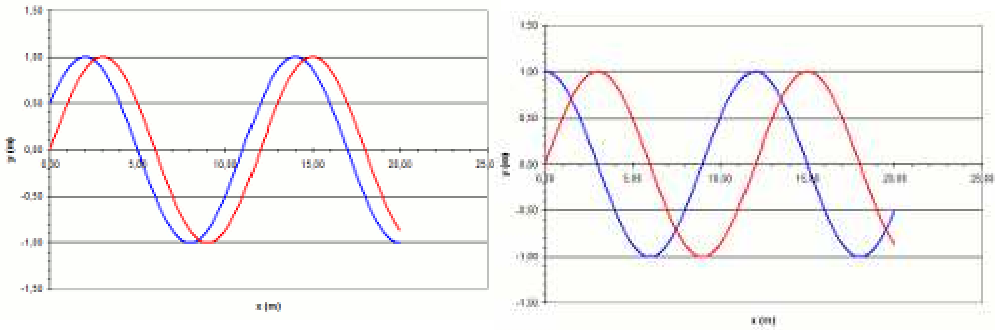
$$\Delta\varphi = k\ \Delta x = k\ n\ \lambda = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} n\ \cancel{\lambda} = n\ 2\pi$$

Para dos puntos en oposición :

$$\Delta\varphi = k\ \Delta x = k\ (2n+1)\ \frac{\lambda}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}} (2n+1)\ \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{2}} = (2n+1)\ \pi$$

El concepto de desfase podemos extenderlo a dos ondas.

En la figura de más abajo pueden verse dos ondas ( $\lambda = 12,0$ m) con desfases diferentes. Las de la figura de la izquierda están desfasadas $\pi/6$ ( lo que se corresponde con una $\Delta x = 1,0$ m). Las ondas de la figura de la derecha están desfasadas $\pi/2$




**Ejemplo 3**

Para la onda de ecuación $y(x,t) = 2\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}x - 5\pi\ t)$ determinar:

a) ¿Cuál será el desfase entre dos puntos situados a 4 m de distancia?
b) ¿Cuál será el desfase entre dos puntos situados a 6 m de distancia?
c) ¿Cuál será el desfase entre dos puntos situados a 5,6 m de distancia?

**Solución:**

a) De la ecuación podemos deducir la longitud de onda:

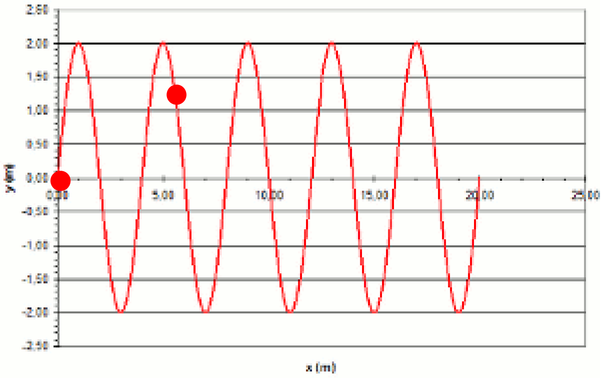
$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\ m$$

Por tanto, los dos puntos separados 4 m estarán en fase (idéntico estado de movimiento)

b) De lo dicho en el apartado anterior se deduce que dos puntos situados a 6 m oscilarán en oposición, ya que 6 m es la distancia correspondiente a tres semilongitudes de onda.

c) Dos puntos separados 5,6 m no oscilaran ni en fase ni en oposición. El desfase, en este caso, es intermedio entre ambas situaciones y vale:

$$\Delta\varphi = k\ \Delta x = \frac{\pi}{2}\ m^{-1}\ 5,6\ m = \frac{5,6}{2}\pi = 2,8\,\pi$$




Situación (aproximada) de dos puntos desfasados 2,8 $\pi$ ó 5,6 m

## Energía asociada a una onda

Una de las características más sobresalientes (y útiles) del movimiento ondulatorio es que las ondas transportan energía de un punto a otro sin que exista transporte de masa. Si la onda es armónica los puntos del medio oscilan con MAS y su energía será la suma de la energía cinética y la potencial :

$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2} k\, A^2$$

A partir de aquí se puede establecer una relación entre la energía que una onda transfiere a los puntos del medio y sus parámetros característicos, tales como la frecuencia:

$$E = \frac{1}{2} k\, A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m 4\pi^2 f^2 A^2 = \left(2\pi^2 m\right) f^2 A^2$$

La energía transferida por una onda a un punto del medio en el que se propaga depende del cuadrado de su frecuencia y del cuadrado de su amplitud.

La frecuencia es una característica de las ondas. En la tabla adjunta se proporciona la frecuencia de algunas ondas electromagnéticas conocidas.

| Ondas (electromagnéticas) | Frecuencia (Hz) |
|---|---|
| Rayos gamma | $10^{20}$ (100 EHz) |
| Rayos X | $10^{18}$ (EHz) |
| Luz visible | $10^{14}$ (100 THz) |
| Microondas | $10^{9}$ (GHz) |
| Ondas de radio | $10^{6}$ (MHz) |

| Hz | Abreviatura | Nombre |
|---|---|---|
| $10^{21}$ | ZHz | Zettahercio |
| $10^{18}$ | EHz | Exahercio |
| $10^{15}$ | PHz | Petahercio |
| $10^{12}$ | THz | Terahercio |
| $10^{9}$ | GHz | Gigahercio |
| $10^{6}$ | MHz | Megaherzio |

Como se ve la energía que los rayos X pueden transferir a los cuerpos sobre los que incidan es muy superior a la de las microondas, por ejemplo, y esa es una de las causas de la peligrosidad que presenta la exposición a radiaciones de alta frecuencia.

La amplitud está relacionada con la intensidad de la onda. De tal manera que para una onda de determinada frecuencia la energía transferida es tanto mayor cuanto mayor es su intensidad. La intensidad de una onda se atenúa muy rápidamente a medida que nos alejamos del foco emisor. De ahí que las consecuencias para la salud serán más graves si estamos próximos al foco emisor de las mismas (antenas de telefonía móvil u otro tipo de emisores).

El sonido también es una onda. En este caso, los efectos nocivos para la salud pueden provenir más de su elevada intensidad (volumen elevado), que de su frecuencia, ya que los sonidos audibles para el oído humano tienen frecuencias moderadas, situadas entre los 20 y los 20 000 Hz.