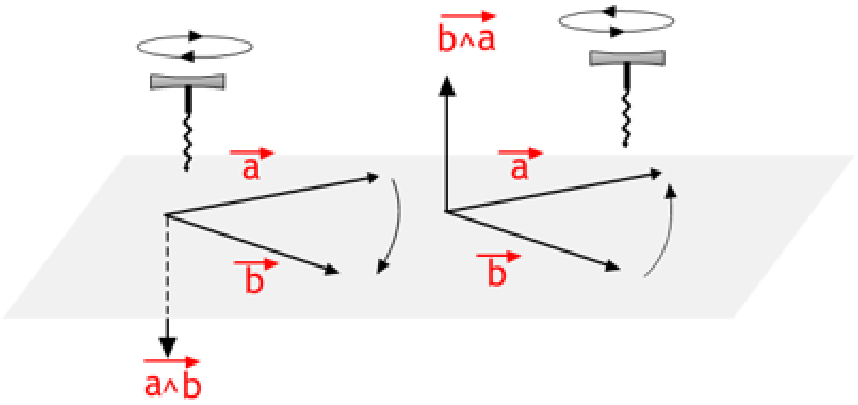
	Producto vectorial de dos vectores **Momento angular**	**IES La Magdalena. Avilés. Asturias**

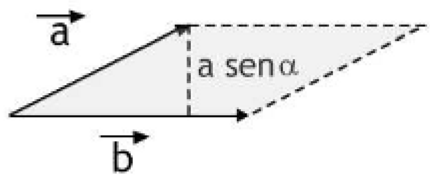
Se define el ***producto vectorial de dos vectores*** $\vec{a} \wedge \vec{b}$ como un vector:

- Cuyo ***módulo*** es el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman: $a\ b\ \text{sen}\alpha$
- Cuya ***dirección*** es perpendicular al plano definido por ambos vectores.
- Cuyo ***sentido*** es el del sacacorchos que gira del primer al segundo vector por el camino más corto.

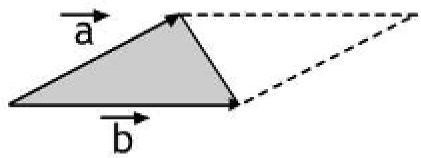


El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo construido con ambos vectores como lados. También se puede ver en la figura que ***es la mitad del área del triángulo formado al dividir en dos partes iguales al paralelogramo.***

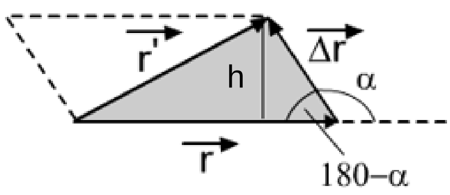
$$A_{\text{paralel}} = b.h = b.\ a\ \text{sen}\ \alpha = |\vec{a \wedge b}|$$



$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} A_{\text{paralelogramo}} = \frac{1}{2} |\vec{a \wedge b}|$$



Otro ejemplo:

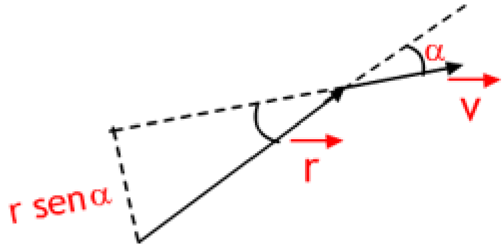


$$|\vec{r} \wedge \Delta\vec{r}| = r\ \Delta r\ \text{sen}\ \alpha = A_{\text{paralelogramo}} = 2\ A_{\text{triángulo}}$$

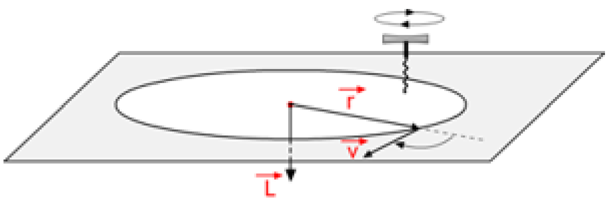
$$\text{Ya que}: \ h = \Delta r\ \text{sen}\ (180 - \alpha) \quad \text{y} \quad \text{sen}(180-\alpha) = \text{sen}\ \alpha$$

Para dar valor a los giros se define una magnitud denominada ***momento angular*** (o momento cinético), $\vec{L}$ definido como el producto vectorial del vector de posición del punto considerado por su momento lineal, $\vec{p}$

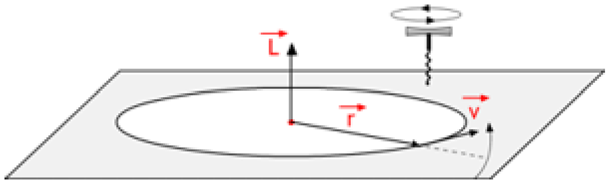
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$
$$\text{Módulo} = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha = r_{\perp}\,m\,v$$
$$\text{Donde}: r_{\perp} = r\,\text{sen}\,\alpha$$



El momento angular, así definido, recoge las magnitudes que caracterizan a una partícula que gira: su masa, su velocidad y la distancia (medida en perpendicular) al centro de giro. Además, el sentido del vector nos indica en qué sentido se realiza el giro:

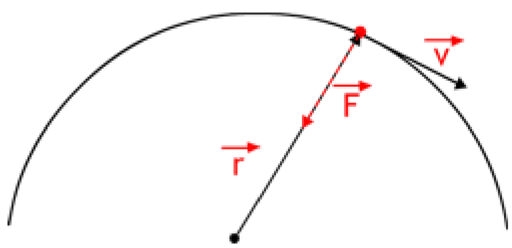


Cuando se va de ***r*** a ***v*** por el camino más corto (hay que llevar el vector ***r*** a concurrencia con ***v***) el sacacorchos gira hacia la derecha, lo que provocaría un movimiento de avance hacia abajo.



Giro hacia el otro lado.
El sacacorchos gira hacia la izquierda, lo que provocaría un movimiento de avance hacia arriba.

Cuando una fuerza es central (apunta siempre hacia el centro de la trayectoria), el momento angular permanece invariable.



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge m\,\vec{a}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$$
$$\text{Si}: \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{cte}}$$

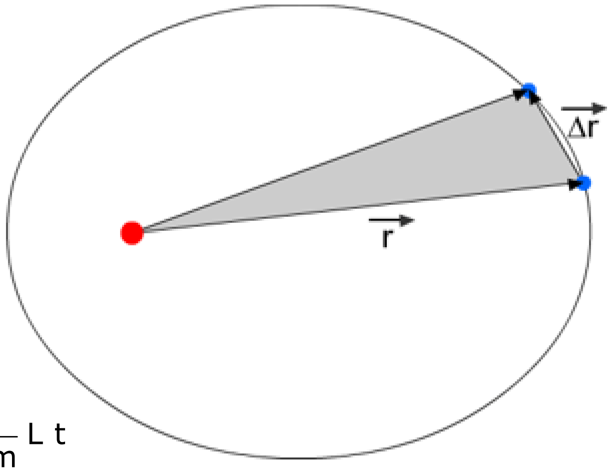
La invarianza del vector momento angular implica constancia en ***módulo, dirección y sentido.***

Cuando un objeto gira sometido a una fuerza central, el vector momento angular permanece constante lo que implica que la órbita ha de ser plana.

Los planetas, por tanto, describirán órbitas planas en su movimiento alrededor del Sol.

De la constancia del momento angular de una partícula cuando se mueve sometida a fuerzas centrales se deduce que la velocidad areolar (rapidez con la que el vector barre el área) es constante:

En efecto, si suponemos un ángulo lo suficientemente pequeño, podríamos considerar que el área del triángulo formado por los vectores de posición y su diferencia es el área barrida por el vector de posición en un tiempo t. Según se ha dicho más arriba este área es la mitad del módulo del producto vectorial



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \overrightarrow{\Delta r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \vec{v}\ t\right| = \frac{1}{2\,m}\left|\vec{r} \wedge m\ \vec{v}\ \right|t = \frac{1}{2\,m} L\ t$$

Por tanto:

$$A = \frac{1}{2\,m} L\ t\ ; \boxed{\frac{A}{t} = \frac{L}{2\,m}}$$

Como el momento angular es constante la velocidad areolar, A/t, es constante.

La Segunda Ley de Kepler aparece, por tanto, como una consecuencia de que la fuerza a la que están sometidos los planetas (atracción del Sol) es central (el momento angular se mantiene invariable).